CAPITOLO 3

ANALISI DIMENSIONALE. SIMILITUDINE E MODELLI (°)

3.1 - GRANDEZZE sono quantità esprimibili con il prodotto di un numero per una unità di misura. Quest'ultima è un "campione" scelto fra grandezze aventi la stessa natura, oppure essa è derivata da altre unità attraverso le formule che definiscono la grandezza considerata in funzione di quelle assunte come "fondamentali". Nella "meccanica" possono scegliersi come fondamentali tre grandezze (°°), che nel campo tecnico sono ordinariamente: la forza F, la lunghezza L e il tempo T. Nel sistema internazionale la forza è sostituita dalla massa M. Se si considerano anche gli aspetti termici di un processo, le grandezze fondamentali diventano quattro con l'aggiunta della temperatura K.

Data la facile generalizzazione dei procedimenti che si esporranno, limitiamo le considerazioni, per semplicità di scrittura, ai fenomeni strettamente meccanici, per i quali assumiamo come fondamentale la terna M, L, T. Le dimensioni di ogni altra grandezza Q si esprimono in funzione delle fondamentali con l'eq.ne simbolica

$$[Q] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma} \tag{3.1}$$

dove α, β, γ sono le dimensioni della Q rispetto a M, L, T. La corrispondente unità di misura è

$$q = \mu^{\alpha} \lambda^{\beta} \tau^{\gamma} \tag{3.2}$$

essendo μ , λ , τ le unità di misura di M, L, T.

La (3.2) si può interpretare come un'eq.ne numerica nella quale μ, λ , τ si intendono numeri moltiplicatori delle unità di misura M, L, T; allora la eq.ne (3.2) mostra che l'unità di misura di Q risulta moltiplicata per $\mu^{\alpha} \lambda^{\beta} \tau^{\gamma}$ (e in tal modo sono definite le dimensioni α , β , γ della Q rispetto a M, L, T). L'eq.ne (3.2) deriva dalla condizione che, detti q_1 e q_2 due moltiplicatori dell'unità di misura della grandezza derivata Q, l'operazione $q_i = T(\mu_i, \lambda_i, \tau_i)$ goda delle proprietà $q_1 q_2 = T(\mu_1, \lambda_1, \tau_1) . T(\mu_2, \lambda_2, \tau_2) = T(\mu_1\mu_2, \lambda_1\lambda_2 , \tau_1\tau_2)$.

Ad es. la pressione ha per definizione le dimensioni $[p] = FL^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$ ossia $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$; se si moltiplica l'unità di misura delle masse per μ, quella delle lunghezze per λ , quella dei tempi per τ , l'unità di misura della pressione risulta moltiplicata per $\mu \lambda^{-1} \tau^{-2}$. Così passando dal sistema c.g.s. al sistema S.I. si ha

1 g x 1000 = 1 kg	(μ = 1000)
1 cm x 100 = 1 m	(λ = 100)
1 s x 1 = 1 s	(τ = 1)

(°) - Stesura del prof.ing. Enrico Marchi

(°°)- Questa scelta rispetta la forma tradizionale delle eq.ni della meccanica.

e quindi:

$$1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}} = 1000\ .\ (100)^{-1}\ (1)^{-2}\ \mathrm{g.cm^{-1}.s^{-2}}$$
$$= 10\ \mathrm{g.cm^{-1}.s^{-2}}$$

Tre grandezze Q_1, Q_2, Q_3 possono essere assunte come fondamentali se sono fra loro dimensionalmente indipendenti, cioè se è impossibile trovare tre esponenti m, n, p $\neq 0$ tali che il monomio $Q_1^m\ Q_2^n\ Q_3^p$ abbia dimensioni nulle (n° puro). In tal caso tutte le altre grandezze, comprese le M, L, T, si possono esprimere dimensionalmente in funzione delle Q_1, Q_2, Q_3; applicando i log a tre eq.ni del tipo (3.2) con i = 1,2,3 si ha

$$\log q_i = \alpha_i \log \varphi + \beta_i \log \lambda + \gamma_i \log \tau \tag{3.3}$$

da cui deriva che la condizione affinchè φ, λ, τ siano determinati in funzione di q_i è che il determinante $\|\alpha_i\ \beta_i\ \gamma_i\|$ sia $\neq 0$.

3.2 - CRITERIO DI OMOGENEITA' . I due membri di un'equazione fisica devono avere le stesse dimensioni, affinchè essa valga indipendentemente dalla scelta delle unità di misura delle grandezze che vi compaiono. Con questo criterio si determinano le dimensioni delle grandezze derivate; ad es. dall'eq.ne di Newton F = m a, assunte le fondamentali M, L, T, si ottengono le dimensioni della forza

$$[F] = M\ L\ T^{-2} \qquad \text{u.d.m.} = \mathrm{kg.m.s^{-2}}$$

Così pure si possono determinare le dimensioni di costanti che intervengono in equazioni di derivazione sperimentale; ad es. nel moto uniforme di una corrente a p.l. in alveo rettangolare molto largo, la velocità media U tende, per alti valori, ad essere proporzionale alla radice della profondità y e della pendenza i , cioè $U = \chi \sqrt{y\ i}$ (eq. di Chèzy-Tadini). Il coeff. di proporzionalità χ, detto coeff. di attrito, deve avere le dimensioni $[\chi] = L\ T^{-1}/L^{1/2} = L^{1/2}T^{-1}$ per la validità dell'equazione nella forma predetta.

3.3 - TEOREMA π (Buckingham-Vachy-Riabusciski). In un dato fenomeno meccanico, sia Q_o una grandezza funzione delle grandezze Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ....., e di parametri adimensionali r (rapporti fra grandezze con le stesse dimensioni, ad es. coefficienti di forma, di scabrezza, ecc..). Più correttamente siano Q_o, Q_1, Q_2 ..... i valori delle relative grandezze rispetto ad un sistema fondamentale di misura. Pur senza conoscere la dipendenza funzionale, si può scrivere

$$Q_o = f_o\ (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \ldots\ldots, r) \tag{3.4}$$

Supposto che Q_1, Q_2, Q_3, siano fra loro dimensionalmente indipendenti (solo Q_1 e Q_2 se il fenomeno è puramente cinematico) si possono esprimere le dimensioni delle altre grandezze a mezzo delle tre predette: $[Q_o] = Q_1^{\alpha_o}\ Q_2^{\beta_o}\ Q_3^{\gamma_o}$; $[Q_4] = Q_1^{\alpha_4}\ Q_2^{\beta_4}\ Q_3^{\gamma_4}$, ecc.....

L'eq.ne (3.4), rappresentando soltanto un legame funzionale fra le Q_i, si può scrivere in modo differente, in particolare nella forma

$$\frac{Q_o}{Q_1^{\alpha_o}\ Q_2^{\beta_o}\ Q_3^{\gamma_o}} = f_1\ \left(Q_1, Q_2, Q_3, \frac{Q_4}{Q_1^{\alpha_4}\ Q_2^{\beta_4}\ Q_3^{\gamma_4}}, \ldots\ldots\ldots, r\right) \tag{3.5}$$

Cambiando l'unità di misura di Q_1 il primo membro della (3.5), essendo un n° puro, non cambia. Anche il II° membro non deve cambiare e perciò la funzione

f_1 non può dipendere da Q_1 isolatamente perchè tale valore è diverso al cambiare dell'1 di misura. Il ragionamento si ripete per Q_2 e per Q_3. Indicando con π_i i numeri

$$\pi_i = \frac{Q_i}{Q_1^{\alpha_i}\ Q_2^{\beta_i}\ Q_3^{\gamma_i}} \tag{3.6}$$

deriva la seguente espressione del teorema π

$$\boxed{Q_o = Q_1^{\alpha_o}\ Q_2^{\beta_o}\ Q_3^{\gamma_o}\ .\ f_1\ (\pi_4,\ \pi_5,\ \ldots\ldots,\ r)} \tag{3.7}$$

Oppure si può utilizzare la forma implicita

$$\boxed{f_2\ (\pi_o,\ \pi_4,\ \pi_5,\ \ldots\ldots,\ r) \quad = 0} \tag{3.8}$$

L'applicazione del teor. π consente di scrivere una relazione fra soli termini adimensionali, dei quali i numeri sono in numero m minore delle n grandezze originarie Q (n-m = r = numero delle grandezze dimensionalmente indipendenti: r = 4 in un fenomeno termodinamico, r = 3 in un fenomeno meccanico, r = 2 in uno cinematico, r = 1 in un problema geometrico).

3.4 - APPLICAZIONI DEL TEOREMA π

3.4.1 - RESISTENZA AL MOTO UNIFORME IN CONDOTTE orizzontali di sezione circolare (fluido incomprimibile; altrimenti il moto non potrebbe essere uniforme, cioè con caratteristiche identiche nel tempo e in tutte le sezioni della condotta).

Indichiamo con F la resistenza globale al moto esercitata sulla corrente fluida dalla parete di una condotta lunga L con $F_1 = F/L$ la resistenza per unità di lunghezza, costante per la prevista uniformità del moto. F_1 può dipendere soltanto: dalla densità ϱ e dalla viscosità μ del fluido (incomprimibile), dalla velocità media U della corrente, dal diametro D della condotta e da parametri r_s rappresentativi della scabrezza della parete (non da parametri di forma essendo possibile, per ipotesi, solo la forma circolare).

$$F_1 = f\ (\varrho,\ \mu,\ U,\ D,\ r_s) \tag{3.9}$$

Assunte come fondamentali le grandezze ϱ, U, D si determinano subito gli esponenti necessari per formare con esse monomi aventi le dimensioni delle grandezze rimanenti F_1 e μ. Dalla $[F_1] = \varrho^\alpha U^\beta D^\gamma$ deriva

$$\frac{M\ L\ T^{-2}}{L} = (M\ L^{-3})^\alpha\ (L\ T^{-1})^\beta\ L^\gamma$$

ed eguagliando gli esponenti delle stesse basi nei due membri, segue

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 0 = -3\alpha + \beta + \gamma \\ -2 = -\beta \end{cases}$$

da cui $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$; ossia $[F_1] = \varrho\ U^2\ D$; analogamente risulta $[\mu] = \varrho\ U\ D$.

Applicando il teor. π nella forma (3.7) segue

$$F_1 = \varrho U^2 D \cdot \varphi\left(\frac{\mu}{\varrho U D}, r_s\right) \tag{3.10}$$

Il n° che compare - oltre ad r_s - come argomento della funzione φ (funzione di resistenza) si chiama n° di Reynolds e si indica generalmente con

$$\boxed{Re = \frac{\varrho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu}} \tag{3.11}$$

ESPERIENZE DI REYNOLDS. Introducendo in una corrente uniforme entro un tubo trasparente un filetto dello stesso fluido, opportunamente colorato per distinguerlo dalla massa rimanente, Reynolds mise in evidenza la possibilità di verificarsi di due distinti regimi di moto:

a) un regime laminare, quando il valore di Re è < 2200 circa, regime caratterizzato da un movimento con velocità tutte parallele all'asse del tubo; il moto avviene a strati cilindrici concentrici, come fossero i tubi di un cannocchiale, e il filetto colorato si conserva rettilineo e separato dal fluido rimanente.

b) un regime turbolento, per valori di Re > 2200÷2500, caratterizzato da velocità con componenti continuamente fluttuanti nel tempo, nella direzione del moto di trasporto ed anche nel piano normale ad essa; il filetto colorato s'incurva e si spezza dopo un breve percorso e le particelle colorate si mescolano con tutta la massa in moto. La legge di resistenza è nei due casi sostanzialmente diversa.

3.4.2 - FORZE DINAMICHE NEI FENOMENI IDRAULICI, provocate da un fluido omogeneo in un campo di moto con contorni fissi.

La forza F, dovuta alle pressioni dinamiche, può dipendere, in generale, nei fenomeni predetti: da proprietà del fluido (densità ϱ, viscosità μ, modulo di comprimibilità e, tensione superficiale σ), da caratteristiche cinematiche e geometriche del moto (velocità U, lunghezza caratteristica L), dalle forze di massa (accelerazione di gravità g), dal tempo t, e da parametri adimensionali di forma r_f e di scabrezza r_s

$$F = f_o\,(\varrho, \mu, e, \sigma, U, L, g, t, r_f, r_s) \tag{3.12}$$

Assunte come fondamentali ancora ϱ, U, L ed applicando il criterio di analisi dimensionale già visto, si ottiene

$$[F] = \varrho U^2 L^2 \;;\; [\mu] = \varrho U L \;;\; [e] = \varrho U^2 \;;\; [\sigma] = \varrho U^2 L \;;\; [g] = U^2 L^{-1} \;;$$

$$[t] = U^{-1} L$$

e l'espressione del teorema π diventa

$$F = \varrho U^2 L^2 \cdot f_1\,(Re, Fr, Ma, We, St, r_s, r_f) \tag{3.13}$$

con

$$Re = \varrho UL/\mu = UL/\nu \quad = \text{n° di Reynolds} \tag{3.14}$$

$$Fr = U/\sqrt{gL} \quad = \text{n° di Froude} \tag{3.15}$$

(3.16) $\quad Ma = U/\sqrt{e/\varrho} = U/c \quad$ = n° di Mach (°)

(3.17) $\quad We = U/\sqrt{\sigma/\varrho L} \quad$ = n° di Weber

ed

$St = L/Ut \quad$ = n° di Strouhal

I primi quattro numeri, significativi anche in regime permanente, rappresentano pure il rapporto fra le forze d'inerzia $\varrho U^2 L^2$, e rispettivamente le forze viscose $\mu U L$ (numero Re), le forze peso $\varrho g L^3$ (numero Fr^2), le forze elastiche $e L^2$ (numero Ma^2), le forze di tensione superficiale σL (numero We^2). L'influenza maggiore o minore sulla funzione f_1 di ciascun argomento dipende dalla importanza che, nel fenomeno considerato, hanno le corrispondenti forze relativamente alle forze d'inerzia.

Si può porre anche $F/\varrho U^2 L^2 = p/\varrho U^2 = Ne$, n° di Newton o coefficiente di pressione, e scrivere l'eq. (3.13) nella forma implicita

$$\boxed{f_2\,(Ne, Re, Fr, Ma, We, St, r_f, r_s) = 0} \tag{3.18}$$

Come si è detto, non tutti questi numeri hanno influenza in ogni fenomeno idraulico. Così il n° di Weber non interviene nei fenomeni dove sono assenti interfacce fra fluidi diversi, in particolare superficie a p.l., il n° di Mach non è importante quando il fluido si comporta praticamente come incomprimibile (valori di Ma << 1), ecc.... . Vi possono essere invece altre proprietà fisiche che hanno effetto in particolari fenomeni, come la tensione di vapore p_v.
Nelle regioni del moto dove la pressione scenda eventualmente a tale valore ($p_v \simeq 0{,}02$ Ata per l'acqua a 20°C) si possono formare cavità vaporose, e queste bolle si richiudono bruscamente (implodono) quando raggiungono zone con pressione più alta, generando elevate sovrappressioni. Il fenomeno è detto cavitazione ed è particolarmente temibile in vicinanza delle pale di pompe, di turbine e di eliche. Un numero analogo a quello di Newton

$$Nc = \frac{p - p_v}{\varrho U^2} \tag{3.19}$$

è generalmente usato come numero di cavitazione.

Altri numeri possono intervenire nei fenomeni di meccanica dei fluidi e di idraulica applicata: essi derivano da grandezze diverse e indipendenti da quelle finora considerate e possono essere costruiti o direttamente adottando come gruppo fondamentale la densità, la velocità e la lunghezza, oppure derivare dalla combinazione monomia di altri numeri puri.

Per esempio, se nel fenomeno considerato interviene la grandezza

velocità di rotazione della terra $\quad \omega_s$

si può utilizzare il numero puro di

Rossby $\quad Ro = U/\omega_s L$

(°) - $c = \sqrt{e/\varrho}$ è la celerità (velocità di propagazione) delle onde di pressione nel fluido omogeneo e illimitato, essendo e il modulo di comprimibilità adiabatica.

Una combinazione monomia di questo con il n° di Reynolds costituisce il n° di Ekmann: Ek = $\nu/\omega_s L^2$ = Ro Re^{-1}.

3.5 - SIMILITUDINE. La similitudine meccanica di fenomeni fluidodinamici richiede che, fissata una scala λ di riduzione delle lunghezze fra i campi di moto (similitudine geometrica), esista una scala τ di riduzione dei tempi (similitudine cinematica) ed una scala φ di riduzione delle forze corrispondenti.

Poichè l'operazione è equivalente ad un cambiamento delle unità di misura delle grandezze fondamentali, cambiamento con il quale restano inalterati i numeri che compaiono nell'eq.ne (3.18), o in qualunque altra equazione fenomenologica scritta in termini adimensionali, si deduce la seguente condizione necessaria per la similitudine meccanica: ogni numero adimensionale che influisce sul fenomeno considerato deve conservare lo stesso valore passando dall'originale ad un suo modello.

3.6 - MODELLI IDRAULICI. Sono riproduzioni, in scala geometrica diversa da 1/1 di fenomeni idraulici. Tenuto conto che la conservazione del n° di Newton, nell'originale e nel modello, è indispensabile per definire la scala delle forze, restano molto limitate le possibilità di conservare altri numeri (nell'originale e nel modello). Infatti, utilizzando nel modello lo stesso fluido del prototipo, si verifica subito che si può conservare un solo numero (oltre ad Ne); utilizzando un fluido diverso si possono conservare due numeri. Nel primo caso, a seconda del n° rispettato, si ottengono similitudini dette di Reynolds oppure di Froude, oppure di Mach, ecc...

La legge di similitudine derivata dal teorema π impone tali restrizioni alla realizzazione di un modello da limitare considerevolmente sia il numero delle informazioni che si possono ottenere, sia il campo stesso dei fenomeni riproducibili. Essa tuttavia impone una similitudine rigorosa al livello delle ipotesi di base, in particolare al livello della "particella" per la quale sono valide le equazioni differenziali nello schema di mezzo continuo, mentre un modello tecnico ha spesso pretese minori, perchè deve fornire informazioni anche solo globali su alcuni aspetti del fenomeno. La similitudine allora non va più riguardata localmente, ma globalmente, e può essere facilitata e semplificata dalle conoscenze specifiche raggiunte sulla classe dei fenomeni che si vogliono riprodurre. Per fare un esempio: la resistenza globale al moto di un tronco di corrente di configurazione assegnata dipende dal n° di Reynolds e da parametri di scabrezza e di forma; rispettati i coefficienti di forma in base alla similitudine geometrica, si può ottenere nel modello la similitudine meccanica globale operando con una coppia di valori Re ed r_s diversi da quelli del prototipo, ma tali da dar luogo alla stessa funzione di resistenza (il cui comportamento dev'essere precedentemente noto, almeno entro certi limiti).

D'altra parte si presentano frequentemente in pratica anche fenomeni nei quali solo una classe di forze è importante rispetto alle forze d'inerzia e per i quali valgono regole semplificate di similitudine, come le seguenti.

3.6.1 - SIMILITUDINE DI REYNOLDS. Vale per i fenomeni idrodinamici dominati dalle forze viscose, senza l'influenza della gravità. Es.: moti uniformi nelle condotte e nei canali, spinta esercitata da una corrente su un corpo totalmente immerso, ecc.... Indicando con apice le grandezze del modello e senza apice quelle del prototipo, la condizione Re = Re' impone, per uno stesso fluido, UL = U'L'. Da questa deriva

$$\frac{U}{U'} = \frac{L\,T^{-1}}{(L\,T^{-1})'} = \frac{L'}{L} \tag{3.20}$$

e quindi $T/T' = (L/L')^2$; e dalla

$$\frac{F}{F'} = \frac{\varrho U^2 L^2}{\varrho (U^2 L^2)'} \tag{3.21}$$

deriva, con la (3.20), $F/F' = 1$. In definitiva si ottengono le seguenti relazioni fra le scale:

lunghezze $L/L' = \lambda$; tempi $T/T' = \tau = \lambda^2$; forze $F/F' = \varphi = 1$

(3.22) e la regola di Reynolds $\boxed{\lambda^2 \tau^{-1} = 1}$.

3.6.2 - SIMILITUDINE DI FROUDE. Vale per i fenomeni idrodinamici nei quali l'influenza delle forze di attrito è trascurabile rispetto a quella delle forze gravitazionali.

Es.: efflussi da luci, azioni di getti contro superficie, moti ondosi senza trasporto di massa, ecc... In generale il comportamento di opere o strutture che influiscono localmente sul moto può essere studiato su modello con la regola di Froude. E' la situazione di gran lunga più frequente in pratica, anche perchè la influenza di Re tende a svanire con il crescere dello stesso numero (da cui deriva la necessità di fare modelli piuttosto grandi, proprio per sottrarli alla dipendenza da Re).

Dalla condizione Fr = Fr' segue, per uno stesso fluido, $U/\sqrt{L} = U'/\sqrt{L'}$. Ne deriva, con procedimento analogo al precedente:

$$\frac{U}{U'} = \frac{L\,T^{-1}}{(L\,T^{-1})'} = \sqrt{\frac{L}{L'}} \qquad \text{e quindi} \quad T/T' = (L/L')^{1/2} \tag{3.23}$$

$$\frac{F}{F'} = \frac{\varrho\, U^2 L^2}{\varrho (U^2\, L^2)'} = \left(\frac{L}{L'}\right)^3 \tag{3.24}$$

Si ottengono in definitiva le seguenti relazioni fra le scale:

lunghezze $L/L' = \lambda$; tempi $T/T' = \tau = \lambda^{\frac{1}{2}}$; forze $F/F' = \varphi = \lambda^3$

(3.25) e la regola di Froude $\boxed{\lambda \tau^{-2} = 1}$.